

L2 de MQ1

Curso de Mecânica Quântica 1 - 2010.1 - UFF - Prof. Marco Moriconi

1. A Lagrangiana que descreve uma partícula não relativística interagindo com um campo magnético é dada por

$$L = \frac{1}{2}m \left(\frac{d\vec{q}}{dt} \right)^2 + e \frac{d\vec{q}}{dt} \cdot \vec{A} - V(q). \quad (1)$$

Quando consideramos a integral de trajetória para este caso, temos que discretizar o termos da ação correspondente ao potencial vetor

$$q \int_0^t d\tau \frac{d\vec{q}}{d\tau} \cdot \vec{A} = e \int_0^t d\vec{q} \cdot \vec{A}. \quad (2)$$

Uma maneira de discretizar esta última fórmula seria escrevê-la como o limite de

$$e \sum_{j=0}^{\infty} (\vec{q}_{j+1} - \vec{q}_j) \cdot \vec{A}(\vec{q}_j). \quad (3)$$

Não é claro, porém, qual deve ser o ponto $\vec{q}_j$ na expressão anterior. Poderíamos escolher $\vec{q}_j = \vec{q}_j$ ou $\vec{q}_j = \vec{q}_{j+1}$ ou algum ponto intermediário. A maneira de resolver esta questão é tomar um ponto qualquer entre $\vec{q}_j$ e $\vec{q}_{j+1}$ e considerar a expressão obtida pela fórmula de Feynman. Escrevendo $\psi(\vec{q}, t + \epsilon)$ e procedendo de forma semelhante ao que fizemos em sala para mostrar que a equação de Schroedinger decorre da integral de trajetória, mostre que a prescrição correta, que fornece a equação de Schroedinger de uma partícula acoplada a um campo magnético, é aquela na qual tomamos $\vec{q}_j$ o ponto médio do intervalo $\vec{q}_j$ e $\vec{q}_{j+1}$.

2. Em sala vimos que o propagador do oscilador harmônico pode ser escrito em termos da integral de trajetória, da seguinte forma:

$$K(q_1, t_1; q_2, t_2) = \exp \left(\frac{i}{\hbar} S_c \right) A(t_1 - t_2), \quad (4)$$

onde S_c é a ação da trajetória clássica (trajetória que satisfaz às condições de contorno) e $A(t)$ é dada por

$$A(t) = \int \mathcal{D}\eta \exp \left(\frac{i}{\hbar} S[\eta] \right), \quad (5)$$

onde $S[\eta]$ é a ação do oscilador harmônico que satisfaz às seguintes condições de contorno: $\eta(t_1) = \eta(t_2) = 0$.

- (a) Calcule ação clássica explicitamente.
- (b) Usando o resultado do item anterior e a propriedade de composição do propagador, mostre que

$$\frac{A(t_2 - t_1)}{A(t_2 - t)A(t - t_1)} = \sqrt{2\pi i \frac{\sin(t_2 - t) \sin(t - t_1)}{\sin(t_2 - t_1)}}$$

3. Sabemos que o propagador em uma dimensão pode ser escrito da seguinte forma:

$$K(q_2, t_2; q_1, t_1) = \sum_{n=0}^{\infty} \langle q_2 | n \rangle \langle n | q_1 \rangle \exp \left(-\frac{i}{\hbar} E_n(t_2 - t_1) \right). \quad (6)$$

Considerando a forma explícita do propagador encontrada no item anterior, e fazendo a continuação analítica $t_2 - t_1 = -i\tau$, expanda o propagador em série de potências de $\exp(-\omega\tau)$, onde ω é a frequência angular do oscilador harmônico. Comparando as duas formulações, encontre os três primeiros estados ligados e níveis de energia do oscilador harmônico.

4. Considere uma partícula de spin 1. Encontre as representações matriciais para os operadores J_i , com $i = 1, 2, 3$.
5. A interação de quadrupolo elétrico acopla o gradiente do campo externo a um tensor de segunda ordem, construído a partir dos operadores de spin.

(a) Escolhendo uma base apropriada, mostre que esta interação pode ser escrita como

$$H_q = A \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} S_x^2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} S_y^2 + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} S_z^2 \right) \quad (7)$$

(b) Mostre que esse hamiltoniano pode ser escrito como

$$H_q = \alpha(3S_z^2 - \mathbf{S} \cdot \mathbf{S}) + \beta(S_+^2 + S_-^2) \quad (8)$$

onde α e β são constantes relacionadas a A , e ϕ satisfaz à equação de Laplace.

(c) Encontre os autovalores de H_q para um sistema de spin $3/2$.

6. Suponha que duas partículas interagem por meio de um potencial que depende do spin, dado por $V(r) = V_1(r) + V_2(r)\sigma_1 \cdot \sigma_2$, onde σ_i é o operador de spin da partícula i . Mostre que a equação de Schroedinger para os estados ligados se desacopla em duas equações, uma com potencial $V_1(r) + V_2(r)$ e outra com potencial $V_1(r) - 3V_2(r)$.
7. Considere dois operadores vetoriais $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Mostre que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ é um escalar.
8. Mostre que se um operador comuta com duas componentes do momento angular, então ele comuta com a terceira componente.
9. Mostre que um operador vetorial em um espaço de Hilbert bidimensional tem, necessariamente, a forma $\mathbf{V} = \lambda_V \sigma$.
10. Considere a soma de três spins 1, $\mathbf{J} = \mathbf{J}_1 + \mathbf{J}_2 + \mathbf{J}_3$.
 - (a) Quais os autovalores possíveis para $\mathbf{J}$? Quantos auto estados temos para cada um desses valores?
 - (b) Construa o estado $\mathbf{J} = 0$ explicitamente.